Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 18 settembre 2006 - SOLUZIONI

1. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3+An}{n^3+1}\right)^n = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[3]{n^3+A}-\cos(1/n)) = +\infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(An)}{n} - n\sin\left(\frac{A}{n}\right) = -A \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^A+A^n+1} = A \qquad \underline{\qquad\qquad}.$$

Infatti

$$\left(\frac{n^3+An}{n^3+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{An-1}{n^3+1}\right)} = e^{n\left(\frac{An-1}{n^3+1}+o\left(\frac{An-1}{n^3+1}\right)\right)} = e^{\frac{A}{n}+o\left(\frac{A}{n}\right)} \to e^0 = 1$$
$$n\left(\sqrt[3]{n^3+A}-\cos(1/n)\right) = n^{4/3}\left(\sqrt[3]{1+A/n^3}-\frac{\cos(1/n)}{n^3}\right) \to +\infty$$
$$\frac{\sin(An)}{n} \to 0 \quad \text{(infinitesima per limitata)}, \qquad \frac{\sin(A/n)}{A/n} \to 1 \quad \text{(limite notevole)}$$
$$\sqrt[n]{n^A+A^n+1} = A\sqrt[n]{A^{-n}n^A+1+A^{-n}} \to A\cdot 1 = A$$

2. Data la funzione $f(x) = e^x + Ax$ si ha $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{1+A}$, perché $f(0) = 1$ e dunque $f^{-1}(1) = 0$ mentre $f'(x) = e^x + A$ da cui $f'(0) = 1 + A$ e

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1+A}$$

3. Si ha: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\sqrt{1-4x}-1+4x^2}{x^3} = -\frac{32}{3}$.
Infatti

$$e^{2x} = 1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{6}+o(x^3) = 1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$$
$$\sqrt{1-4x} = 1+\frac{-4x}{2}-\frac{(-4x)^2}{8}+\frac{(-4x)^3}{16}+o(x^3) = 1-2x-2x^2-4x^3+o(x^3)$$

e dunque

$$e^{2x}\sqrt{1-4x} = (1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3))(1-2x-2x^2-4x^3+o(x^3)) =$$
$$1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)-2x-4x^2-4x^3+o(x^3)-2x^2-4x^3+o(x^3)-4x^3+o(x^3) =$$
$$1-4x^2-\frac{32}{3}x^3$$

da cui segue il risultato scritto sopra.

SECONDA PARTE

1. Per ognuno dei seguenti casi si indichi se la serie indicata converge assolutamente (barrare la casella $\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente (barrare $\boxed{\text{C}}$) oppure non

converge (barrare $\boxed{\text{NC}}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2} \qquad \boxed{\text{AC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{1+n!} \qquad \boxed{\text{AC}};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \qquad \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{1+3^{-n}+n^4} \qquad \boxed{\text{AC}}.$$

La prima e la seconda serie sono a segni variabili però passando al valore assoluto del termine generale si ha $\frac{1}{1+n^2} \approx \frac{1}{n^2}$ che è il termine generale di una serie (armonica) convergente e analogamente $\frac{3^n}{1+n!} \approx \frac{3^n}{n!}$ che è anch'esso termine di una serie convergente (per vederlo si può usare il criterio del rapporto). Le altre due serie sono a termini positivi e dunque convergenza e convergenza assoluta coincidono. Per quanto riguarda la terza essa non converge dato che il suo termine generale non tende a zero: $\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \to 1$. L'ultima invece converge perché $\frac{n^2}{1+3^{-n}+n^4} \approx \frac{1}{n^2}$ (termine di una serie armonica convergente).

2. Si calcoli il seguente integrale improprio.

$$\int_1^{\infty}\frac{x+A}{(x^2+1)x^2}\,dx = \ln(\sqrt{2}) + A\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

Per vederlo usiamo la riduzione in fratti semplici:

$$\frac{x}{(x^2+1)x^2} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x} = \frac{(a+c)x^2+bx+c}{(x^2+1)x}$$

da cui $a=-1, b=0, c=1$ e dunque

$$\int_1^{\infty}\frac{x}{(x^2+1)x^2}\,dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx - \int_1^{\infty}\frac{x}{(x^2+1)}\,dx = \left[\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right]_1^{\infty} = \ln(\sqrt{2})$$

Analogamente

$$\frac{1}{(x^2+1)x^2} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} = \frac{(a+c)x^3+(b+d)x^2+cx+d}{(x^2+1)x^2}$$

da cui $a=c=0, b=-1, d=1$ e dunque

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)x^2}\,dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx - \int_1^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)}\,dx = \left[-\frac{1}{x} - \arctan(x)\right]_1^{\infty} = 1-\frac{\pi}{4}$$

3. Sia $f(x,y) := xy + x^6 + y^6$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f. Si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = y - 6x^5, \quad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = x - 6y^5$$

per cui i punti stazionari verificano

$$\begin{cases} x &= 6y^5 \\ y &= 6y^5 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per y, la seconda per x e prendendone la differenza si ottiene $x^6 = y^6$ da cui o $x = y$ oppure $x = -y$. Inserendo $y = x$ nel sistema iniziale si ottiene $x = 6x^5$ e dunque o $x = 0$ oppure $x = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}$. Inserendo invece $y = -x$ si ottiene $x = -x^5$ che ha solo la soluzione $x = 0$. In definitiva i punti critici sono $(0,0)$ e $\pm(1/\sqrt[4]{6}, 1/\sqrt[4]{6})$. Se calcoliamo le derivate seconde si trova

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = -30x^4, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = -30y^4, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 1$$

e quindi la matrice Hessiana in $(0,0)$ risulta $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si vede facilmente che tale matrice è indefinita e dunque $(0,0)$ non è il minimo. D'altra parte il minimo deve esistere perché la funzione tende all'infinito quando $\|(x,y)\| \to \infty$. Inoltre per la simmetria della funzione i due punti rimanenti, cioé $\pm(1/\sqrt[4]{6}, 1/\sqrt[4]{6})$, sono tra loro equivalenti e sono dunque entrambi punti di minimo.

4. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2}{x} y + 1 - \frac{1}{x^2} \qquad \text{per } x > 0$$

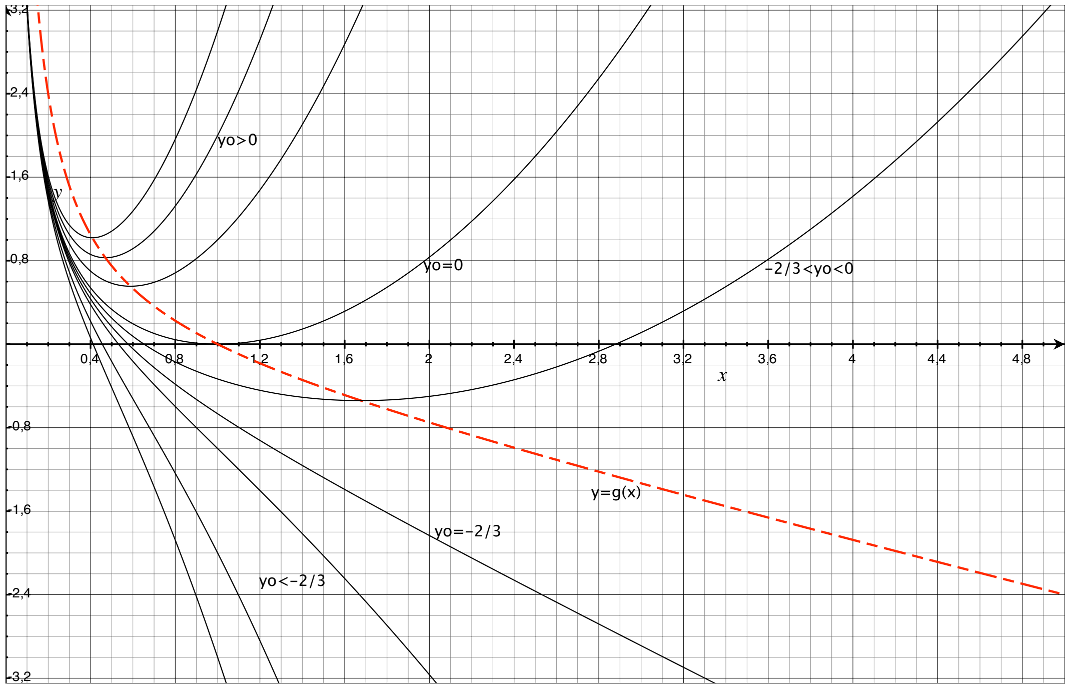
Applicando la formula risolutiva:

$$y(x) = x^2 \left(y_0 + \int_1^x \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \frac{1}{t^2}\, dt \right) = x^2 \left(y_0 + \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{3t^3} \right]_1^x \right) = Cx^2 - x + \frac{1}{3x}$$

dove $C = y_0 + \frac{2}{3}$. Facendo i limiti si trova

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } C > 0 \Leftrightarrow y_0 > -\frac{2}{3} \\ -\infty & \text{se } C \le 0 \Leftrightarrow y_0 - \le \frac{2}{3} \end{cases}$$

Per studiare la monotonia di y conviene indicare con $F(x,y) := \frac{2}{x} y + 1 - \frac{1}{x^2}$, di modo che l'equazione differenziale si può scrivere come $y' = F(x,y)$ e dunque la monotonia di y dipende dal segno di F. Allora $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$ dove $g(x) := \frac{1 - x^2}{2x}$ e analogamente $F(x,y) > 0 (< 0) \Leftrightarrow y > g(x) (< g(x))$. Tracciando il grafico di g e tenendo conto dei limiti di y a zero a all'infinito si deducono i grafici mostrati in figura.
Esaminando i grafici si vede abbastanza facilmente che y taglia due volte l'asse x se e solo se $-\frac{2}{3} < y_0 < 0$.



yo>0
yo=0
-2/3<yo<0
y=g(x)
yo=-2/3
yo<-2/3
x
y